Известия Тульского государственного университета
Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч.1. С. 161–171

УДК 681.5.015

Рекурсивные цифровые фильтры с импульсной характеристикой, описываемой синусоидальной функцией, и свойства их коэффициентов

Д. А. Никитин

Аннотация. Доказаны существование и единственность (при фиксированном порядке) цифрового рекурсивного фильтра с импульсной характеристикой, которая описывается произвольной синусоидальной функцией. Следствием доказанных теорем является возможность синтеза таких фильтров без использования пошаговых приближающих методов. Вычислены соотношения между параметрами синусоиды и коэффициентами соответствующего ЦФ.

Ключевые слова: рекурсивный цифровой фильтр, импульсная характеристика, синтез ЦФ, фильтры на границе устойчивости.

Введение

В работе [1] приведено доказательство существования и единственности рекурсивного фильтра с импульсной характеристикой, члены которой являются значениями полинома, взятыми на равномерной сетке. Описан алгоритм расчёта таких фильтров, доказана и определена связь между порядком фильтра и значениями его коэффициентов. Также рассмотрены известные ранее методы расчёта БИХ-фильтров по импульсной характеристике. Фильтры, рассматриваемые в [1], являются неустойчивыми, поскольку полином — расходящаяся функция. Поэтому для цифровой фильтрации предлагается несколько других вариантов их использования (несколько в [2] и одно в [3, 4]).

В данной статье подход, применённый в [1] для доказательства существования и единственности фильтра и для разработки алгоритма его синтеза, применён к БИХ-фильтрам с синусоидальной импульсной характеристикой. Такие фильтры имеют уже нерасходящуюся импульсную характеристику периодического характера, то есть находятся на границе устойчивости.

Для практических целей фильтры выводят на границу устойчивости, например, для минимизации управляющих сигналов, либо для получения из такого фильтра генератора периодического сигнала. Ниже будет показано, что фильтры, о которых идёт речь в данной статье, обладают указанными свойствами.

Основные результаты

В работе доказывается, что существует единственный рекурсивный цифровой фильтр (БИХ-фильтр) определённого минимального порядка, начало импульсной характеристики (ИХ) которого совпадает с Y. Данный порядок также доставляется приведёнными ниже теоремами. Его минимальность означает, что фильтра меньшего порядка с такой ИХ не существует. Разумеется БИХ-фильтров большего порядка с такой же ИХ существует бесконечное множество. Таким образом, тезис о том, что существует бесконечное множество цифровых фильтров с одинаковыми временными характеристиками, не нарушается. А один из существенных результатов данной работы и работы [1] заключается в нахождении нижней границы достаточного порядка фильтра для импульсных характеристик определённой формы.

Ниже приводятся доказательства двух теорем, касающихся различных видов синусоиды. Сначала рассматривается синусоидальная функция в самом общем виде. А в следующей теореме показывается, что если приравнять к нулю свободный член функции, то количество коэффициентов соответствующего БИХ-фильтра уменьшится.

Исходными данными к решаемой задаче является уравнение цифровой фильтрации:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k) \tag{1}$$

и исходная последовательность Y значений произвольной синусоидальной функции, взятых с постоянным шагом.

Теорема 1. *Для последовательности Y длины $L \geqslant 6$, члены которой являются равноотстоящими отсчётами синусоидальной функции одного переменного $y_i = f(i) = a \cdot \sin(b \cdot i + c) + d$, $a \neq 0$, $|b| < \pi$, $|c| < \pi/2$, $d \neq 0$, и заданы первые 6 членов y_0, $y_1, \ldots$ y_5, существует единственный рекурсивный цифровой фильтр третьего порядка ($M = 3$, $N = 2$), импульсная характеристика которого совпадает с Y.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда члены Y являются отсчётами синусоидальной функции, взятыми с шагом равным единице, т.е. $i = 0, 1, \ldots, L-1$. Используя выражение (1), построим начальную систему уравнений для первых 6-ти элементов последовательности Y, приняв её за импульсную характеристику искомого ЦФ (таким образом, $x(n)$=1, 0, 0, 0, ...). Элементарными преобразованиями матрица системы приводится к следующему треугольному виду:

$$
\mathbf{P} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -a\sin(c)-d & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -a\sin(b+c)-d & -a\sin(c)-d & 0 \\
0 & 0 & 0 & -a\sin(2b+c)-d & -a\sin(b+c)-d & -a\sin(c)-d \\
0 & 0 & 0 & -a\sin(3b+c)-d & -a\sin(2b+c)-d & -a\sin(b+c)-d \\
0 & 0 & 0 & -a\sin(4b+c)-d & -a\sin(3b+c)-d & -a\sin(2b+c)-d
\end{pmatrix} \sim
$$

(для краткости опустим первые три столбца)

$$
\sim \begin{pmatrix}
 & 0 & 0 & 0 \\
 & a\sin c+d & 0 & 0 \\
\ldots & a\sin(b+c)+d & a\sin c+d & 0 \\
 & a\sin 2b\cos c+d(1-\cos 2b) & a\sin b\cos c+d(1-\cos b) & a\sin c+d \\
 & a\sin 2b\cos(b+c)+d(1-\cos 2b) & a\sin b\cos(b+c)+d(1-\cos b) & a\sin(b+c)+d \\
 & a\sin 2b\cos(2b+c)+d(1-\cos 2b) & a\sin b\cos(2b+c)+d(1-\cos b) & a\sin(2b+c)+d
\end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix}
 & 0 & 0 & 0 \\
 & a\sin c+d & 0 & 0 \\
\ldots & a\sin(b+c)+d & a\sin c+d & 0 \\
 & a\sin 2b\cos c+d(1-\cos 2b) & a\sin b\cos c+d(1-\cos b) & a\sin c+d \\
 & a\sin 2b(\cos(b+c)-\cos c) & a\sin b(\cos(b+c)-\cos c) & a(\sin(b+c)-\sin c) \\
 & a\sin 2b(\cos(2b+c)-\cos c) & a\sin b(\cos(2b+c)-\cos c) & a(\sin(2b+c)-\sin c)
\end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & a\sin c+d & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & a\sin(b+c)+d & a\sin c+d & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2d(1-\cos b) & a\sin b\cos c+d(1-\cos b) & a\sin c+d \\
0 & 0 & 0 & 0 & a\sin b(\cos(b+c)-\cos c) & a(\sin(b+c)-\sin c) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4a\sin b\sin^2(b/2)}{\cos(b+c)-\cos c}
\end{pmatrix}.
$$

То есть $rang(P) = 6$ при любых $a \neq 0$, $|b| < \pi$, $|c| < \pi/2$, $d \neq 0$. Проведём аналогичные преобразования для расширенной матрицы системы:

$$
\overline{\mathbf{P}} = \left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a\sin c+d \\
0 & 1 & 0 & -a\sin c+d & 0 & 0 & a\sin(b+c)+d \\
0 & 0 & 1 & -a\sin(b+c)-d & -a\sin c-d & 0 & a\sin(2b+c)+d \\
0 & 0 & 0 & -a\sin(2b+c)-d & -a\sin(b+c)-d & -a\sin c-d & a\sin(3b+c)+d \\
0 & 0 & 0 & -a\sin(3b+c)-d & -a\sin(2b+c)-d & -a\sin(b+c)-d & a\sin(4b+c)+d \\
0 & 0 & 0 & -a\sin(4b+c)-d & -a\sin(3b+c)-d & -a\sin(2b+c)-d & a\sin(5b+c)+d \\
0 & 0 & 0 & -a\sin(5b+c)-d & -a\sin(4b+c)-d & -a\sin(3b+c)-d & a\sin(6b+c)+d
\end{array}\right).
$$

Видно, что при приведении матрицы $\mathbf{P}$ к треугольному виду изменился только 4-й квадрант матрицы. Поэтому будем далее для краткости записей рассматривать только преобразования четвёртого квадранта расширенной матрицы системы $\overline{\mathbf{P}}$ (назовём её $\overline{\mathbf{Z}}$). При преобразованиях будем также рассматривать ещё одну строку системы, записанную в соответствии с уравнением фильтрации, чтобы показать, что ранг системы не изменился.

$$\overline{\mathbf{Z}}=\left(\begin{array}{ccc|c} -a\sin(2b+c)-d & -a\sin(b+c)-d & -a\sin c-d & a\sin(3b+c)+d \\ -a\sin(3b+c)-d & -a\sin(2b+c)-d & -a\sin(b+c)-d & a\sin(4b+c)+d \\ -a\sin(4b+c)-d & -a\sin(3b+c)-d & -a\sin(2b+c)-d & a\sin(5b+c)+d \\ -a\sin(5b+c)-d & -a\sin(4b+c)-d & -a\sin(3b+c)-d & a\sin(6b+c)+d \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 2d(1-\cos b) & a\sin b\cos c+d(1-\cos b) & a\sin c+d & 2d(1-\cos b)(1+2\cos b) \\ 0 & a\sin b(\cos(b+c)-\cos c) & a(\sin(b+c)-\sin c) & 0 \\ 0 & a\sin b(\cos(2b+c)-\cos c) & a(\sin(2b+c)-\sin c) & 0 \\ 0 & a\sin b(\cos(3b+c)-\cos c) & a(\sin(3b+c)-\sin c) & 0 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 2d(1-\cos b) & a\sin b\cos c+d(1-\cos b) & a\sin c+d & 0 \\ 0 & a\sin b(\cos(b+c)-\cos c) & a(\sin(b+c)-\sin c) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4a\sin b\sin^2(b/2)}{\cos(b+c)-\cos c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы $\overline{\mathbf{Z}}$ равен 3, значит, ранг матрицы $\overline{\mathbf{P}}$ равен 6. Таким образом, ранги матриц $\mathbf{P}$ и $\overline{\mathbf{P}}$ равны при любых параметрах a, b и c, $a \neq 0$, $|b| < \pi$, $|c| < \pi/2$. Следовательно, система при соблюдении этих условий определена и совместна, то есть имеет единственное решение. Построим теперь те же матрицы, но с L строками, $L > M + N + 1$. После аналогичных элементарных преобразований матрицы приводятся к следующему треугольному виду:

$$\mathbf{P}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a\sin c+d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a\sin(b+c)+d & a\sin c+d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2d(1-\cos b) & a\sin b\cos c+d(1-\cos b) & a\sin c+d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a\sin b(\cos(b+c)-\cos c) & a(\sin(b+c)-\sin c) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4a\sin b\sin^2(b/2)}{\cos(b+c)-\cos c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{P}}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a\sin c+d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a\sin(b+c)+d & a\sin c+d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2d(1-\cos b) & a\sin b\cos c+d(1-\cos b) & a\sin c+d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a\sin b(\cos(b+c)-\cos c) & a(\sin(b+c)-\sin c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4a\sin b\sin^2(b/2)}{\cos(b+c)-\cos c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ранги матриц системы равны, и добавленные $L - M - N - 1$ уравнений линейно зависимы от уравнений начальной системы. Поэтому решение, найденное для начальной системы, состоящей из 6-ти уравнений, будет удовлетворять последовательности отсчётов синусоидальной функции любой длины больше либо равно 6. Это решение представляет собой 6 коэффициентов рекурсивного цифрового фильтра: b_0, b_1, b_2, a_1, a_2, a_3. Пока что доказана справедливость теоремы только для случая, когда Y является последовательностью отсчётов синусоидальной функции с шагом равным единице. Докажем, что она справедлива и в случае любого другого ненулевого постоянного шага:

$y_i = a \cdot \sin(b \cdot (i \cdot step) + c) + d = a \cdot \sin((b \cdot step) \cdot i + c) + d = a \cdot \sin(b' \cdot i + c) + d$, $i = 0, \ldots, L - 1$.

Таким образом, любая последовательность равноотстоящих отсчётов некоторой синусоидальной функции $y_i = a \cdot \sin(b \cdot i + c) + d$, является последовательностью отсчётов с шагом равным единице синусоидальной функции с другим коэффициентом перед i.

Далее строим систему 6-ти уравнений, полученных из выражения (1) при $n = 0, 1 \ldots 5$, и решаем её. Получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
b_0 &= a \sin c + d,\\
b_1 &= a(\sin(b + c) - \sin c) - 2\cos b(a \sin c + d),\\
b_2 &= a \sin(c - b) + d,\\
a_1 &= -2\cos b - 1,\\
a_2 &= 2\cos b + 1,\\
a_3 &= -1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Выражения для b_i уточнены по сравнению с более ранней публикацией [4, с. 57]. Также можно вычислить обратные соотношения (выражения для a и c также уточнены по сравнению с [3] и [4, с. 58]):

$$\begin{aligned}
a &= \frac{2b_0 - b_1 - b_2 - b_0 a_2}{(3 - a_2)\sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{(2b_0 - b_1 - b_2 - b_0 a_2)\sqrt{(3 - a_2)(1 + a_2)}}{a_2(3b_0 - b_1 + b_2 - b_0 a_2) + 3(b_1 - b_2)}\right)\right)},\\
b &= \arccos\frac{a_2 - 1}{2},\\
c &= \operatorname{arctg}\left(\frac{(2b_0 - b_1 - b_2 - b_0 a_2)\sqrt{(3 - a_2)(1 + a_2)}}{a_2(3b_0 - b_1 + b_2 - b_0 a_2) + 3(b_1 - b_2)}\right),\\
d &= \frac{b_0 + b_1 + b_2}{3 - a_2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Далее рассмотрим частный случай, также касающийся синусоиды в общем виде, но со свободным членом, равным нулю. Оказалось, что для этого случая можно использовать фильтр меньшего порядка, что сокращает объём вычислений.

Теорема 2. *Для последовательности Y длины $L \geqslant 4$, члены которой являются равноотстоящими отсчётами синусоидальной функции одного переменного $y_i = f(i) = a \cdot \sin(b \cdot i + c)$, $a \neq 0$, $|b| < \pi$, $|c| < \pi/2$, и заданы первые 4 члена y_0, y_1, y_2, y_3, существует единственный рекурсивный цифровой фильтр второго порядка ($M = 2$, $N = 1$), импульсная характеристика которого совпадает с Y.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда члены Y являются отсчётами синусоидальной функции, взятыми с шагом равным единице, т.е. $i = 0, 1, \ldots, L-1$. Используя выражение (1), построим начальную систему уравнений для первых 5-ти элементов последовательности Y, приняв её за импульсную характеристику искомого ЦФ (таким образом, $x(n)$=1, 0, 0, 0, ...). Элементарными преобразованиями матрица системы приводится к следующему треугольному виду:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a\sin(c) & 0 \\ 0 & 0 & -a\sin(b+c) & -a\sin(c) \\ 0 & 0 & -a\sin(2b+c) & -a\sin(b+c) \\ 0 & 0 & -a\sin(3b+c) & -a\sin(2b+c) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & \sin(c) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(b+c) & \sin(c) \\ 0 & 0 & \sin(2b+c) & \sin(b+c) \\ 0 & 0 & \sin(3b+c) & \sin(2b+c) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & \sin(c) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(c)\cos(b) + \cos(c)\sin(b) & \sin(c) \\ 0 & 0 & \sin(b+c)\cos(b) + \cos(b+c)\sin(b) & \sin(b+c) \\ 0 & 0 & \sin(2b+c)\cos(b) + \cos(2b+c)\sin(b) & \sin(2b+c) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & \sin(c) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(c)\sin(b) & \sin(c) \\ 0 & 0 & \cos(b+c)\sin(b) & \sin(b+c) \\ 0 & 0 & \cos(2b+c)\sin(b) & \sin(2b+c) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & \sin(c) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(c)\sin(b) & \sin(c) \\ 0 & 0 & 0 & \sin(b+c) - \frac{\sin(c)}{\cos(c)}\cos(b+c) \\ 0 & 0 & 0 & \sin(2b+c) - \frac{\sin(c)}{\cos(c)}\cos(2b+c) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & \sin(c) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(c)\sin(b) & \sin(c) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sin(b+c)\cos(c) - \sin(c)\cos(b+c)}{\cos(c)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sin(2b+c)\cos(c) - \sin(c)\cos(2b+c)}{\cos(c)} \end{pmatrix} \sim$$

$$
\sim\begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & \sin(c) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(c)\sin(b) & \sin(c)\cos(c) \\ 0 & 0 & 0 & \sin(b) \\ 0 & 0 & 0 & \sin(2b) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & \sin(c) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(c)\sin(b) & \sin(c)\cos(c) \\ 0 & 0 & 0 & \sin(b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Аналогично для расширенной матрицы системы:

$$
\overline{\mathbf{P}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a\sin(c) \\ 0 & 1 & -a\sin(c) & 0 & a\sin(b+c) \\ 0 & 0 & -a\sin(b+c) & -a\sin(c) & a\sin(2b+c) \\ 0 & 0 & -a\sin(2b+c) & -a\sin(b+c) & a\sin(3b+c) \\ 0 & 0 & -a\sin(3b+c) & -a\sin(2b+c) & a\sin(4b+c) \end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \sin(c) \\ 0 & 1/a & \sin(c) & 0 & \sin(b+c) \\ 0 & 0 & \sin(b+c) & \sin(c) & \sin(2b+c) \\ 0 & 0 & \sin(2b+c) & \sin(b+c) & \sin(3b+c) \\ 0 & 0 & \sin(3b+c) & \sin(2b+c) & \sin(4b+c) \end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim\begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \sin(c) \\ 0 & 1/a & \sin(c) & 0 & \sin(b+c) \\ 0 & 0 & \sin(c)\cos(b)+\cos(c)\sin(b) & \sin(c) & \sin(2b)\cos(c)+\cos(2b)\sin(c) \\ 0 & 0 & \sin(b+c)\cos b + \cos(b+c)\sin b & \sin(b+c) & \sin(2b)\cos(b+c)+\cos(2b)\sin(b+c) \\ 0 & 0 & \sin(2b+c)\cos b+\cos(2b+c)\sin b & \sin(2b+c) & \sin(2b)\cos(2b+c)+\cos(2b)\sin(2b+c) \end{pmatrix}\sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \sin(c) \\ 0 & 1/a & \sin(c) & 0 & \sin(b+c) \\ 0 & 0 & \cos(c)\sin(b) & \sin(c) & \sin(2b)\cos(c) \\ 0 & 0 & \cos(b+c)\sin(b) & \sin(b+c) & \sin(2b)\cos(b+c) \\ 0 & 0 & \cos(2b+c)\sin(b) & \sin(2b+c) & \sin(2b)\cos(2b+c) \end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \sin(c) \\ 0 & 1/a & \sin(c) & 0 & \sin(b+c) \\ 0 & 0 & \cos(c)\sin(b) & \sin(c) & \sin(2b)\cos(c) \\ 0 & 0 & 0 & \sin(b+c) - \frac{\sin(c)}{\cos(c)}\cos(b+c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(2b+c) - \frac{\sin(c)}{\cos(c)}\cos(2b+c) & 0 \end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \sin(c) \\ 0 & 1/a & \sin(c) & 0 & \sin(b+c) \\ 0 & 0 & \cos(c)\sin(b) & \sin(c)\cos(c) & 2\sin(b)\cos(b)\cos(c) \\ 0 & 0 & 0 & \sin(b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(2b) & 0 \end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & \sin(c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(c)\sin(b) & \sin(c)\cos(c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Таким образом, ранги матриц $\mathbf{P}$ и $\overline{\mathbf{P}}$ равны при любых параметрах a, b и c, $a \neq 0$, $|b| < \pi$, $|c| < \pi/2$. Значит, система определена и совместна, то есть имеет единственное решение. Построим теперь те же матрицы, но с L строками, $L > M + N + 1$. После аналогичных элементарных преобразований матрицы приводятся к следующему треугольному виду:

$$\mathbf{P} \sim \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & \sin(c) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(c)\sin(b) & \sin(c)\cos(c) \\ 0 & 0 & 0 & \sin(b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{P}} \sim \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & \sin(c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(c)\sin(b) & \sin(c)\cos(c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $rang(P) = rang(\overline{P}) = 4$, и добавленные $L - M - N - 1$ уравнений линейно зависимы от уравнений начальной системы. Поэтому решение, найденное для начальной системы, состоящей из 4-х уравнений, будет удовлетворять последовательности отсчётов синусоидальной функции, любой длины больше либо равной 4. Это решение представляет собой 4 коэффициента рекурсивного цифрового фильтра: b_0, b_1, a_1, a_2.

Пока что доказана справедливость теоремы только для случая, когда Y является последовательностью отсчётов показательной функции с шагом равным единице. Докажем, что она справедлива и в случае любого постоянного шага:

$$y_i = a \cdot \sin(b \cdot (i \cdot step) + c) = a \cdot \sin((b \cdot step) \cdot i + c) = a \cdot \sin(b' \cdot i + c),\ i = 0, \ldots, L - 1.$$

Таким образом, любая последовательность равноотстоящих отсчётов некоторой синусоидальной функции является последовательностью отсчётов с шагом равным 1 синусоидальной функции с другим коэффициентом перед неизвестным.

Аналогично предыдущей теореме могут быть найдены соотношения между коэффициентами фильтра и параметрами синусоиды. Для этого строим систему 4-х уравнений, полученных из выражения (1) при $n = 0, 1 \ldots \ldots 3$, и решаем её. Получаем следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= a \sin c, \\
b_1 &= a \sin(b - c), \\
a_1 &= -2 \cos b, \\
a_2 &= 1.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Получаем также обратные соотношения:

$$
\begin{gathered}
a = \frac{b_0}{\sin c} = 2\sqrt{\frac{b_0^2 + b_1^2 - b_0 b_1 a_1}{4 - a_1^2}}, \\
b = \arccos\left(-\frac{a_1}{2}\right), \\
c = \operatorname{arctg} \frac{b_0\sqrt{4 - a_1^2}}{2b_1 - b_0 a_1}.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Условие $|b| < \pi$ было поставлено в условиях обеих теорем для соблюдения теоремы Котельникова (иначе будем иметь менее двух отсчётов синусоиды на период). Как видим, полученными формулами (3) и (5) это условие соблюдается.

Также про условие $|c| < \pi/2$ можно добавить, что теоремы будут действительны для любых $c \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, однако при $|c| > \pi/2$ формулы (3) и (5) будут давать значения c, перемещённые в область $(-\pi/2; \pi/2)$ путём прибавления к исходному значению πk, а также может меняться знак параметра a в зависимости от того, в какую четверть попала итоговая фаза синусоиды. Построенная с такими параметрами синусоида будет полностью совпадать с исходной, поэтому при практических применениях ограничение на значения c может ослабляться до условия $c \neq \pi/2 + \pi k$.

Заключение

Как было сказано выше, фильтры, находящиеся на границе устойчивости: а) требуют для управления меньшего входного воздействия, чем устойчивые фильтры, и б) могут использоваться в качестве генераторов периодических сигналов. В данном случае для описанных фильтров мы видим соблюдение указанных свойств. Во-первых, даже один ненулевой отсчёт на входе фильтра провоцирует генерацию незатухающего сигнала на выходе ЦФ. Во-вторых, генерируемый фильтром сигнал является периодическим: при наличии одного отсчёта на входе фильтром генерируется синусоида (отсчёты синусоидальной функции), если же ненулевых отсчётов больше, то, благодаря свойству линейности процесса обработки входных данных, на выходе будет генерироваться сумма синусоид, что также является периодическим сигналом.

Приведённые в статье теоремы и формулы (2) и (4) позволяют быстро синтезировать цифровые фильтры, которые можно использовать как генераторы отсчётов синусоиды с заданными параметрами. Например, используя (2) и (4), вычислим фильтры 2-го и 3-го порядка, импульсная характеристика которых является отсчётами функции $y = -2\sin(3x+1)$:

Фильтр 2-го порядка	Фильтр 3-го порядка
$b_0 = -1.6829$	$b_0 = -1.6829$
$b_1 = -1.8186$	$b_1 = -0.1357$
$a_1 = 1.9800$	$b_2 = 1.8186$
$a_2 = 1$	$a_1 = 0.9800$
	$a_2 = -0.9800$
	$a_3 = -1.$

Оба полученных БИХ-фильтра имеют одинаковую импульсную характеристику, оба являются единственными фильтрами с такой ИХ среди фильтров своего порядка. Очевидно также, что первый из них (БИХ-фильтр 2-го порядка) требует для своей работы меньшее количество ресурсов.

Таким образом, в данной статье описывается семейство фильтров, выход которых является незатухающим периодическим сигналом. При подаче на вход такого фильтра единичного импульса на его выходе будут генерироваться отсчёты синусоиды. Поэтому такие фильтры можно использовать для генерации синусоидального сигнала. Приведены формулы для расчёта коэффициентов фильтра в зависимости от параметров необходимой синусоиды. Также приведены обратные формулы – расчёта параметров синусоиды из коэффициентов полученного фильтра – они могут применяться в приложениях, описанных в [2–4].

Список литературы

1. *Никитин Д.А.* Рекурсивные цифровые фильтры с импульсной характеристикой, описываемой полиномиальной функцией, и свойства их коэффициентов // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2011. Вып. 2. С. 211–221.
2. *Никитин Д.А.* Приложения алгоритма синтеза рекурсивных цифровых фильтров по импульсной характеристике // Цифровая обработка сигналов. 2009. № 4. С. 8–15.
3. *Никитин Д.А., Сафонов К.В.* Автоматическое определение интерполянта с наименьшим количеством параметров // Вестн. Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та. 2011. Вып. 4 (37). С. 58–63.
4. *Никитин Д.А.* Поиск простейшего интерполянта. Автоматическое определение вида интерполянта с наименьшим количеством параметров и вычисление всех его параметров. Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2012. 116 с.

Никитин Дмитрий Александрович (nikitin.bit@gmail.com), к.ф.-м.н., начальник службы технической поддержки, ООО «Связьком», Красноярск.

The recursive digital filters with impulse response defined by sinusoidal function, and properties of their coefficients

D. A. Nikitin

Abstract. In this paper we proved the existence and uniqueness (for a fixed order) of the digital recursive filter with the impulse response, which is described by an arbitrary sinusoidal function. A consequence of the theorems is the possibility of synthesis of such filters without using approximating step-by-step methods. Also the relations between the sine wave parameters and corresponding DF coefficients are calculated.

Keywords: recursive digital filter, impulse response, DF synthesis, filters at the stability boundary.

Nikitin Dmitry (nikitin.bit@gmail.com), candidate of physical and mathematical sciences, head of technical support, Svyazcom LLC, Krasnoyarsk.

Поступила 17.04.2013